8/3/2016

Πρόταση: Έστω w μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της $c: I \to S$ όπου S κανονική προσανατολισμένη επιφάνεια. Αν $X: U \to S$ είναι ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων του προσανατολισμού της S με $c(I) \subseteq X(U)$. Τότε

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}$$

όπου $c(t) = X(u(t), v(t))$ και $\varphi = \measuredangle(x_u, w)$

Απόδειξη: $F = 0 \Leftrightarrow \langle x_u, x_v \rangle = 0$ (λόγω ορθογωνιότητας)

$$e_1 = \frac{x_u}{\|x_u\|} = \frac{x_u}{\sqrt{E}}, \quad e_2 = \frac{x_v}{\|x_v\|} = \frac{x_v}{\sqrt{G}}$$

Τότε $e_1 \times e_2 = N$

Έχω $\left[\frac{Dw}{dt}\right] - \left[\frac{De_1}{dt}\right] = \frac{d\varphi}{dt}$

$\varphi = \measuredangle(e_1, w) = \measuredangle(x_u, w)$

$$\left[\frac{De_1}{dt}\right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \times e_1 \right\rangle, \quad e_1 = e_1(u(t), v(t)) = \frac{X_u(u(t), v(t))}{\sqrt{E(u(t), v(t))}}$$

και $N \times e_1 = e_2$

Τότε $$\left[\frac{De_1}{dt}\right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{E(\dots)}} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(X_u(u(t), v(t))\right) + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{E(\dots)}}\right) X_u(\cdot\cdot)}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E}} \left\langle \frac{du}{dt} X_{uu} + \frac{dv}{dt} X_{uv}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{du}{dt} \langle X_{uu}, X_v \rangle + \frac{dv}{dt} \langle X_{uv}, X_v \rangle \right\}$$

$$\langle X_{uu}, X_v \rangle = \overset{F=0}{\cancel{\langle X_u, X_v \rangle_u}} - \langle X_u, X_{uv} \rangle = -\frac{1}{2} \langle X_u, X_u \rangle_v$$

$$= -\frac{1}{2} E_v$$

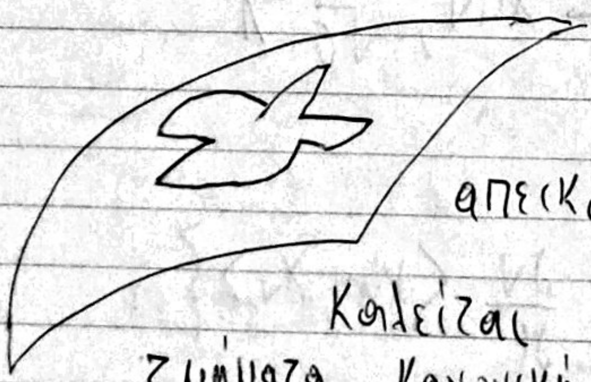
$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} \langle X_v, X_v \rangle_u = \frac{1}{2} G_u$$

<u>Πόρισμα</u>: Η γεωδαισιακή καμπυλότητα $c: I \to S$

είναι $$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi}{ds}$$

όπου $c(s) = X(u(s), v(s))$, $\varphi = \measuredangle (X_u, c')$

Απλές - Κλειστές, κατά τμήματα κανονικές καμπύλες σε τυχούσα επιφάνεια



Ορισμός: Μια απεικόνιση $c: [0, l] \to S$ καλείται απλή, κλειστή κατά τμήματα κανονική αν-ν

1) είναι συνεχής
2) $c(0) = c(l)$
3) $c|_{[0,l)}$ είναι 1-1
4) υπάρχει διαμέριση $\{ t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_{k-1} < t_k = l \}$

ωστε $C|_{[t_i, t_{i+1}]}$ κανονική

Τα σημεία $\{C(0), C(t_1), \dots, C(t_i), \dots C(t_{k-1}), C(t_k)\}$

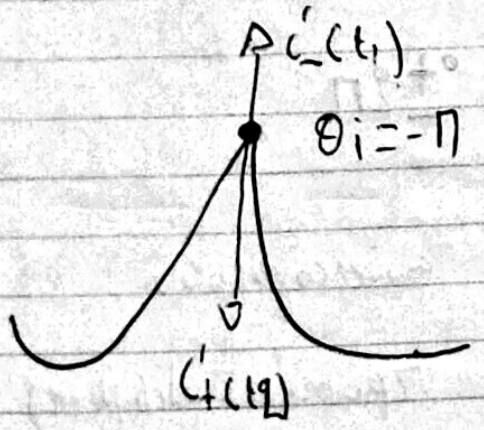
καλούνται κορυφές της C

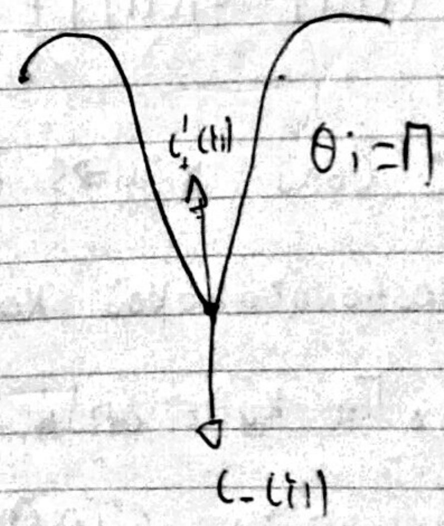
Εξωτερικές γωνίες

Ορισμός: Η εξωτερική γωνία της C στην κορυφή

$C(t_i)$ είναι η προσανατολισμένη γωνία

$$\theta_i = \measuredangle\left(C'_-(t_i), C'_+(t_i) \right) \subseteq [-\pi, \pi]$$





Εσωτερική γωνία στην $C(t_i)$ είναι
$\pi - \theta_i$ (θ_i εξωτερική γωνία)

Θεώρημα: Έστω $C: [0, l] \to \mathbb{R}^2$ απλή, κλειστή κανονική καμπύλη τότε ο αριθμός περιστροφής

$$n_c = \pm 1 \quad \left(n_c = \frac{\varphi(l) - \varphi(0)}{2\pi} \right)$$

$$\varphi = \angle(e_1, c)$$

$$\sum_i \left(\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i) \right) + \sum_j \theta_j = \pm 2\pi$$

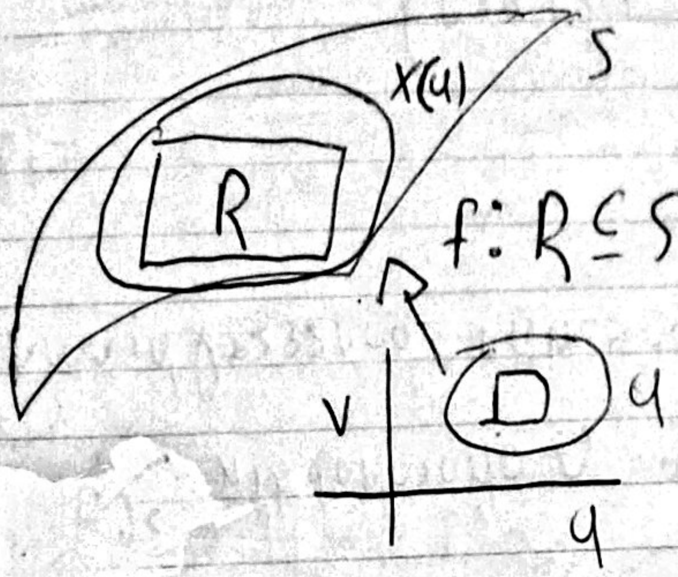
Θεώρημα: Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων του προσανατολισμού κανονικής προσανατολισμένης επιφάνειας. Για κάθε απλή κλειστή κατά τμήματα κανονική καμπύλη $C: [0, L) \to X(U)$ ισχύει

$$\sum_i \left(\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i) \right) + \sum_j \theta_j = \pm 2\pi$$

(όπου $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}]$, $\varphi_i = \angle(X_u, c)$

με την προυπόθεση ότι U ομοιομορφικό με ανοικτό δίσκο στον $\mathbb{R}^2$

Ολοκλήρωση σε επιφάνειες



$f: R \subseteq S \to \mathbb{R}$, f συνεχής

$$\iint_R f\, d\sigma = \iint_{X^{-1}(R)} f\circ X \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv.$$

$$= \iint_{X^{-1}(R)} f\circ X \, \|X_u \times X_v\|\, du\, dv.$$

- $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$, $[a,b] = \partial[a,b]$

Θεωρημα Gauss - Green

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

Εστω X ορθογώνιο συστημα συντεταγμένων του προσανατολισμού και U ομοιομορφικό με κλειστό δίσκο

Εστω $R \subseteq X(U)$ με R ομοιομορφικό με κλειστό δίσκο και το ∂R υποθέτω οτι είναι η εικόνα μιας απλής κλειστής καμπύλης κατα τμήματα κανονικής καμπύλης με θετικό προσανατολισμό

$C : [0, l] \to X(u)$

$C|[s_i, s_{i+1}]$ κανονική καμπύλη

$$k_g|[s_i, s_{i+1}] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_i}{ds}$$

$$\varphi_i = \measuredangle (X_u, c')$$

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g \, ds = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \cdot \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} ds + \underbrace{\int_{s_i}^{s_{i+1}} \varphi_i' \, ds}_{= \varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)}$$

$$\Rightarrow \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g \, ds = \int_C \underbrace{\left(-\frac{1}{2\sqrt{EG}} E_v \, du \right)}_{P} + \underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} G_u \, dv \right)}_{Q}$$

$$+ \sum_i \left(\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i) \right)$$

$$= \iint_D \left(-\frac{1}{2\sqrt{EG}} G_u \right)_u + \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} E_v \right)_v du \, dv$$

Έξοχο θεώρημα: $K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}}E_v\right)_v\right]$
για ορθογώνιο
σύστημα.

Άρα, $\sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\,ds = \sum_i \left(\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)\right) - \iint_D K\sqrt{EG}\,du\,dv$

$\Rightarrow \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) = \sum_i \left(\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)\right) - \iint_R K\,d\sigma$

$\Rightarrow \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) + \iint_R K\,d\sigma = \sum_i \left(\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)\right) = 2\pi - \sum_j \theta_j$ {άθροισμα εξωτερικών γωνιών}

Θεώρημα (Τοπικό Θεώρημα Gauss-Bonnet)

Έστω $X: U \to S$ ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων του προσανατολισμού με U ομοιομορφικό με ανοιχτό δίσκο στο $\mathbb{R}^2$. Αν $R \subseteq X(U)$ ομοιομορφικό με κλειστό δίσκο του οποίου το σύνορο είναι απλή, κλειστή, κατά τμήματα κανονική καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου και θετικά προσανατολισμένη με εξωτερικές γωνίες θ_j τότε ισχύει

$$\sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) + \iint_R K\, d\sigma + \sum_j \theta_j = 2\pi$$

Σχόλιο. i) Το θεώρημα είναι τοπικό αφού εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων

ii) Οι περιοχές αυτού του τύπου λέγονται απλές περιοχές

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $R \subseteq S$ καλείται απλή περιοχή της S αν το R είναι ομοιομορφικό με τον κλειστό δίσκο στο $\mathbb{R}^2$ και το σύνορο του ∂R είναι η εικόνα μιας απλής, κλειστής κατά τμήματα κανονικής καμπύλης της S

Το τοπικό Θεώρημα Gauss-Bonnet ισχύει για απλές περιοχές που περιέχονται σε περιοχή συντεταγμένων

Ορισμός: Ένα συμπαγές υποσύνολο R κανονικής επιφάνειας καλείται Κανονική περιοχή της S αν-ν το σύνορο ∂R είναι εικόνες πεπερασμένου πλήθους απλών κλειστών κατά τμήματα κανονικών καμπυλών οι οποίες ανά δυο δεν τέμνονται

Τρίγωνο μιας επιφάνειας S είναι κάθε απλή περιοχή της οποίας το σύνορο έχει 3 ακριβώς κορυφές με εξωτερικές γωνίες $\neq 0$

Ορισμός: Έστω R κανονική περιοχή της κανονικής επιφάνειας S. Ονομάζουμε τριγωνοποίηση της R κάθε πεπερασμένο σύνολο από τρίγωνα $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ ώστε (i) $\bigcup_{i=1}^{n} T_i = R$

(ii) Αν για i, j, $i \neq j$ $\quad i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$

$T_i \cap T_j \neq \emptyset$ τότε $T_i \cap T_j =$ μια κορυφή ή μια πλευρά

Θεώρημα: κάθε κανονική περιοχή δέχεται μια τουλάχιστον τριγωνοποίηση.

Συμβολισμός: Έστω $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_n\}$ τριγωνοποίηση της κανονικής περιοχής R. Τότε $F(\mathcal{T}) :=$ πλήθος τριγώνων της $\mathcal{T}$

$E(\mathcal{T}) :=$ πλήθος πλευρών τριγώνου της $\mathcal{T}$

$V(\mathcal{T}) :=$ πλήθος κορυφών τριγώνου της $\mathcal{T}$

Παράδειγμα: $S = \mathbb{R}^2$

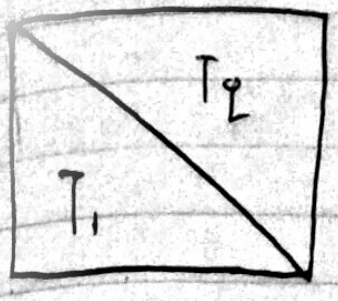
$R =$ κλειστός δίσκος

τριγωνοποίηση

$\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3\}$ $F(\mathcal{T}) = 3$

$E(\mathcal{T}) = 6$

$V(\mathcal{T}) = 4$



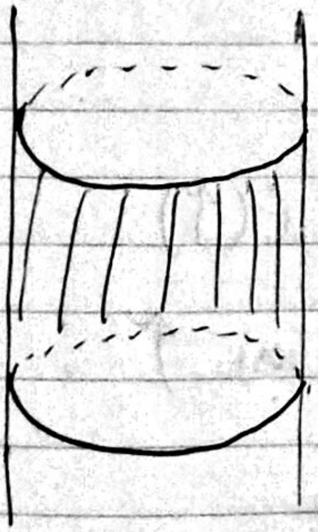
~ τριγωνοποίηση

$\mathcal{T} = \{T_1, T_2\}$

$F(\mathcal{T}) = 2$

$E(\mathcal{T}) = 5$

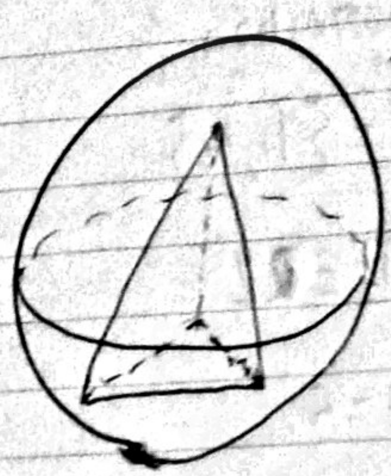
$V(\mathcal{T}) = 4$



$F(\mathcal{T}) = 2$

$E(\mathcal{T}) = 4$

$V(\mathcal{T}) = 2$



$F(\mathcal{T})=4$

$E(\mathcal{T})=6$

$V(\mathcal{T})=4$

<u>Ορισμός</u>: Καλούμε χαρακτηριστική $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ Euler-Poincare μιας τριγωνοποίησης $\mathcal{T}$ μιας κανονικής περιοχής $R \subseteq S$ τον αριθμό $X(R,\mathcal{T}) = F(\mathcal{T}) - E(\mathcal{T}) + V(\mathcal{T})$

Θεώρημα: Αν $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ τριγωνοποιήσεις της κανονικής περιοχής $R \subseteq S$ τότε $X(R, \mathcal{T}) = X(R, \mathcal{T}')$

Ο αριθμός αυτός καλείται χαρακτηριστική Euler-Poincare της κανονικής περιοχής R

$X(R) = F + V - E$ (E, F δεν είναι τα θεμελιώδη ποσά)